Per la circonferenza a_0 (x^2 -[- /) = i si sa a priori che deve risultare $k = a$ ™* Se ne conclude la relazione

'- O»)? = 2'

È facile mettere in rapporto i risultati precedenti colla teoria degli invarianti.

Siccome l'origine degli assi può essere situata in un punto qualunque del piano, così ponendola nel punto fisso ed ammettendo che il termine costante nel polinomio £7 sia l'unità (ciò che è sempre lecito, dovendo il punto fisso essere preso fuori della curva), si ha dalla (7)

k— —
K- p .

Ora la potenza *P,* in virtù del teorema generale, rimane inalterata quando si fa ruotare la curva nel proprio piano intorno all'origine come centro : dunque la quantità *k,* che sappiamo essere una funzione lineare dei coefficienti di (7, deve rimanere invariata quando si trasformino le variabili *x, y* con una sostituzione della forma

x = *x'* cos a -j-

y^r sen a , *y* = — *x'* sen

a. -j- *y^f* cos a *y*

cioè con una sostituzione ortogonale ; vale a dire che formando l'espressione *k* coi coefficienti della forma binaria //, trasformata dalle formolo precedenti, si deve riprodurre identicamente l'espressione primitiva, mediante la spontanea eliminazione dell'angolo a.

Per dedurre la forma di *k* dalla considerazione degli invarianti, supponiamo *n* pari ed uguale a 2 m, e prendiamo la forma binaria

(M) («,„ «,» «,. • • - 0C*, yr + K*1 + /r>

dove / *è* una indeterminata. Sia *T* un invariante di questa funzione, e quindi un'espressione della forma

$$T = T_0 + t T_1 + t^2 T_2 + \cdots ,$$

dove T_0, T_1, T_2, ... sono funzioni intere dei soli coefficienti a_0, a_1, a_2, ... a_{2m}. Quando le variabili x, *y* vengono trasformate ortogonalmente, il binomio $x^2 + y^2$ si trasforma in sé stesso, quindi la quantità *i* non è alterata dalla sostituzione : invece i